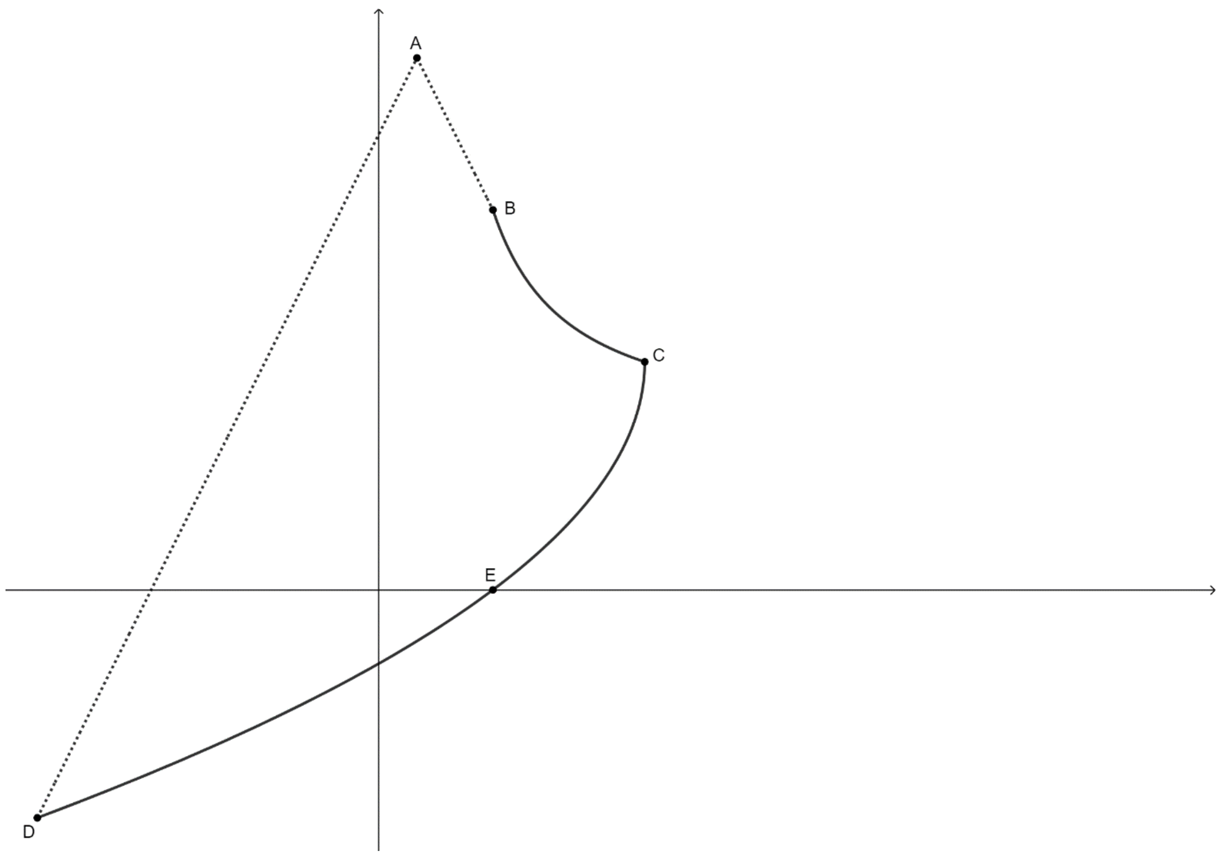
SITUATION-PROBLÈME : LE PARCOURS D'HÉBERSTISME

Le propriétaire du camp de vacances de Lacolle, en Montérégie, fera aménager deux nouveaux sentiers pour le parcours d'hébertisme.

LE PLAN

Dans le plan cartésien ci-dessous, qui est gradué en hectomètres, les sentiers BC et CD sont les deux sentiers existants. Comme ils n'ont pas encore été aménagés, les sentiers AB et AD sont tracés en pointillé.



- L'équation associée au sentier BC est $y = \frac{4x+8}{x-1}$.
- L'abscisse du point B est 3.
- L'ordonnée du point C est 6.
- L'équation associée au sentier CD est de la forme $y = a\sqrt{b(x-7)} + k$.
- Le point $E(3, 0)$ est l'un des points du sentier CD.
- L'ordonnée du point D est -6.

Document élaboré par Jean-Michel Panet

LES SENTIERS AB ET AD

Les sentiers AB et AD devront être représentés par une équation de la forme $y = a|x - h| + k$, où :

- a est un multiple de 0,5 ;
- les coordonnées du point A sont $A(h, k)$;
- h est un nombre supérieur à 0.

Déterminez une équation possible de la forme $\boldsymbol{y = a|x - h| + k}$ qui représentera les deux nouveaux sentiers que le propriétaire du camp de vacances de Lacolle fera aménager pour le parcours d'hébertisme.

Clé de correction

- **ORDONNÉE DU POINT B**

On cherche la valeur de y lorsque $x = 3$.

$$y = \frac{4(3) + 8}{3 - 1} = \frac{20}{2} = 10$$

L'ordonnées du point B est 10.

- **ABSCISSE DU POINT C**

On cherche la valeur de x lorsque $y = 6$.

$$6 = \frac{4x + 8}{x - 1}$$
$$6(x - 1) = 4x + 8$$
$$6x - 6 = 4x + 8$$
$$2x = 14$$
$$x = 7$$

L'abscisse du point C est 7.

- **ÉQUATION ASSOCIÉE AU SENTIER CD**

L'équation associée au sentier CD est de la forme $y = a\sqrt{b(x - 7)} + k$.

Puisque les coordonnées du point C sont $C(7, 6)$, alors $k = 6$.

D'après l'orientation de la courbe représentant le sentier CD, l'on peut poser que $b = -1$.

Puisque le point $E(3, 0)$ est l'un des points du sentier CD, l'on a que :

$$0 = a\sqrt{-(3 - 7)} + 6$$
$$-6 = a\sqrt{4}$$
$$-6 = 2a$$
$$-3 = a$$

L'équation associée au sentier CD est $y = -3\sqrt{-(x - 7)} + 6$.

- **ABSCISSE DU POINT D**

On cherche la valeur de x pour laquelle $y = -6$.

$$-6 = -3\sqrt{-(x-7)} + 6$$
$$4 = \sqrt{-(x-7)}$$
$$16 = -(x-7)$$
$$-9 = x$$

L'abscisse du point D est -9.

- **ÉQUATION POSSIBLE DE LA FORME $y = a|x-h| + k$ QUI REPRÉSENTERA LES DEUX NOUVEAUX SENTIERS DU PARCOURS D'HÉBERTISME**

Si on suppose que $a = -1$ et l'on a que $B(3, 10)$ et $D(-9, -6)$.		
Équation de la demi-droite AD	**Équation de la demi-droite AB**	**Coordonnées du point A**
$y = x + b$ $-6 = -9 + b$ $3 = b$ $y = x + 3$	$y = -x + b$ $10 = -3 + b$ $13 = b$ $y = -x + 13$	$x + 3 = -x + 13$ $2x = 10$ $x = 5 \rightarrow y = 5 + 3 = 8$ $A(5, 8)$
L'équation serait donc $y = -\|x - 5\| + 8$. Cette solution doit être rejetée car l'abscisse du point A doit être inférieure à celle du point B. Or, $5 > 3$.		
Si on suppose que $a = -1{,}5$ et l'on a que $B(3, 10)$ et $D(-9, -6)$.		
Équation de la demi-droite AD	**Équation de la demi-droite AB**	**Coordonnées du point A**
$y = 1{,}5x + 7{,}5$	$y = -1{,}5x + 14{,}5$	$A\left(\frac{7}{3}, 11\right)$
L'équation serait donc $y = -\frac{3}{2}\left\|x - \frac{7}{3}\right\| + 11$. Cette solution est à considérer. En effet, $-\frac{3}{2}$ est un multiple de 0,5 et $0 < \frac{7}{3} < 3$.		
Si on suppose que $a = -2$ et l'on a que $B(3, 10)$ et $D(-9, -6)$.		
Équation de la demi-droite AD	**Équation de la demi-droite AB**	**Coordonnées du point A**
$y = 2x + 12$	$y = -2x + 16$	$A(1, 14)$
L'équation serait donc $y = -2\|x - 1\| + 14$. Cette solution est à considérer. En effet, -2 est un multiple de 0,5 et $0 < 1 < 3$.		

Si on suppose que $a = -2{,}5$ et l'on a que $B(3, 10)$ et $D(-9, -6)$.		
Équation de la demi-droite AD	**Équation de la demi-droite AB**	**Coordonnées du point A**
$y = 2{,}5x + 16{,}5$	$y = -2{,}5x + 17{,}5$	$A\left(\frac{1}{5}, 17\right)$
L'équation serait donc $y = -\frac{5}{2}\left\lvert x - \frac{1}{5}\right\rvert + 17$. Cette solution est à considérer. En effet, $-\frac{5}{2}$ est un multiple de 0,5 et $0 < \frac{1}{5} < 3$.		
Si on suppose que $a = -3$ et l'on a que $B(3, 10)$ et $D(-9, -6)$.		
Équation de la demi-droite AD	**Équation de la demi-droite AB**	**Coordonnées du point A**
$y = 3x + 21$	$y = -3x + 19$	$A\left(-\frac{1}{3}, 20\right)$
L'équation serait donc $y = -3\left\lvert x + \frac{1}{3}\right\rvert + 20$. Cette solution est à rejeter, car h doit être supérieur à 0. Or, $-\frac{1}{3} < 0$.		