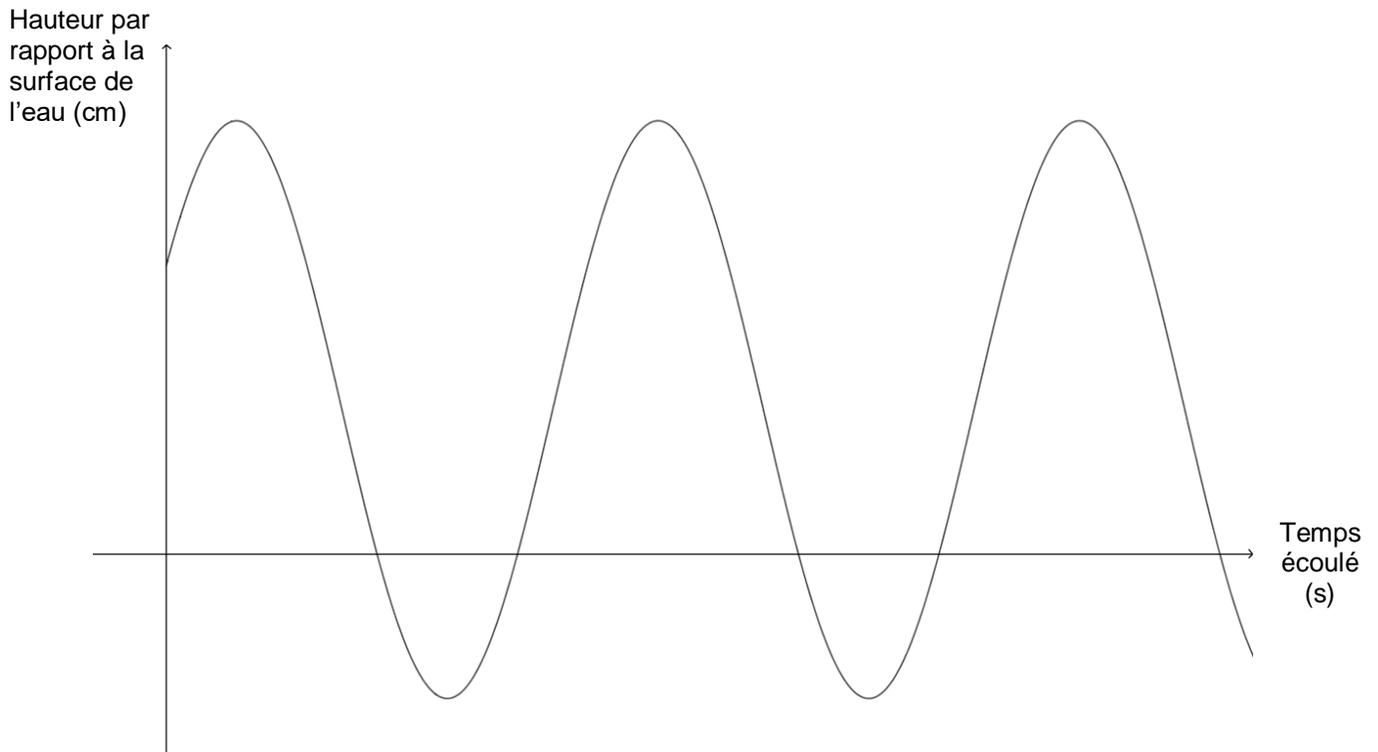


### SITUATION D'APPLICATION : L'USINE DE FILTRATION

Dans une usine de filtration, un ingénieur doit concevoir une roue pour transporter de l'eau. Cette roue est munie de nacelles qui se remplissent lorsque celles-ci sont immergées. Pour qu'une nacelle soit complètement remplie, elle doit passer au moins 40 secondes sous l'eau.

La relation entre la hauteur d'une nacelle par rapport à la surface de l'eau, en cm, et le temps écoulé depuis la mise en marche de la roue, en secondes, est représentée dans le plan cartésien ci-dessous.



Pour observer les caractéristiques de sa roue, l'ingénieur commence par installer seulement une nacelle sur celle-ci. Voici quelques observations faites par l'ingénieur :

- La roue met 108 secondes pour faire un tour complet.
- La hauteur initiale de la nacelle par rapport à la surface de l'eau est de 155 cm.
- La nacelle atteint sa hauteur maximale pour la première fois après 18 secondes.
- Après 198 secondes, la nacelle se trouve à 7 cm sous la surface de l'eau.

**La nacelle de cette roue peut-elle se remplir complètement ?**

➤ **RÈGLE DE LA FONCTION  $f$**

La règle de la fonction  $f$  est de la forme  $f(x) = a \cos(b(x - h)) + k$ . Puisque la roue met 108 secondes pour faire un tour complet, la période de la fonction  $f$  est de 108 secondes.

$$108 = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{2\pi}{108} = \frac{\pi}{54}$$

Puisque la nacelle atteint sa hauteur maximale pour la première fois après 18 secondes, alors  $h = 18$ .

Puisque la hauteur initiale de la nacelle par rapport à la surface de l'eau est de 155 cm, alors  $f(0) = 155$ .

Puisque la nacelle se trouve à 7 cm sous la surface de l'eau après 198 secondes, alors  $f(198) = -7$ .

$$\begin{aligned} 155 &= a \cos\left(\frac{\pi}{54}(0 - 18)\right) + k \\ 155 &= 0,5a + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -7 &= a \cos\left(\frac{\pi}{54}(198 - 18)\right) + k \\ -7 &= -0,5a + k \end{aligned}$$

En utilisant la méthode de réduction, l'on obtient :  
 $162 = a \rightarrow k = 155 - 0,5(162) = 74$

La règle de la fonction  $f$  est  $f(x) = 162 \cos\left(\frac{\pi}{54}(x - 18)\right) + 74$ .

➤ **MOMENTS LORSQUE LA NACELLE ATTEINT LA SURFACE DE L'EAU LORS DU PREMIER TOUR DE ROUE**

On cherche les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $f(x) = 0$ .

$$0 = 162 \cos\left(\frac{\pi}{54}(x - 18)\right) + 74$$

$$-\frac{37}{81} = \cos\left(\frac{\pi}{54}(x - 18)\right)$$

$$\begin{aligned} \cos^{-1}\left(-\frac{37}{81}\right) &= \frac{\pi}{54}(x - 18) \\ 53,1540 \dots &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\pi - \cos^{-1}\left(-\frac{37}{81}\right) &= \frac{\pi}{54}(x - 18) \\ 90,8459 \dots &= x \end{aligned}$$

Lors du premier tour de roue, la nacelle atteint la surface de l'eau après 53,1540... secondes et après 90,8459... secondes.

➤ **PÉRIODE DURANT LAQUELLE LA NACELLE SE TROUVE SOUS L'EAU LORS D'UN TOUR DE ROUE**

$$90,8459 \dots \text{ secondes} - 53,1540 \dots \text{ secondes} = 37,6919 \dots \text{ secondes}$$

➤ **CONCLUSION**

Non, la nacelle ne peut se remplir complètement, car elle passe moins de 40 secondes sous l'eau. En effet, 37,6919 ... secondes < 40 secondes.