SITUATION D'APPLICATION : UNE SOMME PARTICULIÈRE

Voici de l'information sur les fonctions polynomiales du second degré f_1, f_2, f_3 et f_4.

$\boldsymbol{f_1}$	La règle de la fonction f_1 est $f_1(x) = 3x^2 - 27x - 108$.
$\boldsymbol{f_2}$	La fonction f_2 possède les caractéristiques suivantes : • Les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction f_2 sont $(8, -32)$. • La valeur initiale de la fonction f_2 est 96.
$\boldsymbol{f_3}$	La règle de la fonction f_3 est de la forme $f_3(x) = -(x - x_1)(x - 30)$. De plus, $f_3(2) = -112$.
$\boldsymbol{f_4}$	La règle de la fonction f_4 est de la forme $f_4(x) = a(x - 3)(x - x_2)$ où $x_2 > 3$. De plus, la valeur initiale de la fonction f_4 est la même que celle de la fonction f_3.

Pour chacune des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4, la somme des zéros est particulière.

Quelle est l'image de la fonction $\boldsymbol{f_4}$?

Document élaboré par Jean-Michel Panet

- **ZÉROS DE LA FONCTION f_1**

On cherche la valeur de x pour laquelle $f_1(x) = 0$.

$0 = 3x^2 - 27x - 108$

En utilisant la formule quadratique, l'on obtient :

$$x = \frac{-(-27) \pm \sqrt{(-27)^2 - 4(3)(-108)}}{2(3)} = \frac{27 \pm 45}{6}$$

$x = \frac{27 - 45}{6} = -3$ **ET** $x = \frac{27 + 45}{6} = 12$

Les zéros de la fonction f_1 sont -3 et 12.

- **RÈGLE DE LA FONCTION f_2**

La règle de la fonction f_2 est de la forme $f_2(x) = a(x - h)^2 + k$.

$f_2(x) = a(x - 8)^2 - 32$
$96 = a(0 - 8)^2 - 32$, car la valeur initiale de la fonction f_2 est 96.
$128 = 64a$
$2 = a$

La règle de la fonction f_2 est $f_2(x) = 2(x - 8)^2 - 32$.

- **ZÉROS DE LA FONCTION f_2**

On cherche la valeur de x pour laquelle $f_2(x) = 0$.

$0 = 2(x - 8)^2 - 32$
$16 = (x - 8)^2$
$\pm 4 = x - 8$

$-4 = x - 8$
$4 = x$

ET

$4 = x - 8$
$12 = x$

Les zéros de la fonction f_2 sont 4 et 12.

- **RÈGLE DE LA FONCTION f_3**

Puisque $f_3(2) = -112$, l'on a que :

$-112 = -(2 - x_1)(2 - 30)$
$-4 = 2 - x_1$
$6 = x_1$

La règle de la fonction f_1 est $f_1(x) = -(x - 6)(x - 30)$.

- **ZÉROS DE LA FONCTION f_3**

D'après la règle de la fonction f_3 , qui est exprimée sous la forme factorisée, les zéros de la fonction f_3 sont 6 et 30.

- **PARTICULARITÉ RELATIVE À LA SOMME DES ZÉROS DES FONCTIONS f_1, f_2 et f_3**

Pour ces fonctions, la somme des zéros correspond au carré du plus petit zéro.

	Somme des zéros	**Carré du plus petit zéro**
f_1	$-3+12=9$	$(-3)^2=9$
f_2	$4+12=16$	$4^2=16$
f_3	$6+30=36$	$6^2=36$

- **VALEUR INITIALE DE LA FONCTION f_3**

$f_3(0)=-(0-6)(0-30)=-180$

La valeur initiale de la fonction f_3 est -180.

- **RÈGLE DE LA FONCTION f_4**

Puisque $x_2>3$, alors la somme des zéros de la fonction f_4 est 9 (3^2). Donc,

$3+x_2=9$
$x_2=6$

Puisque la valeur initiale de la fonction f_4 est la même que celle de la fonction f_3, alors $f_4(0)=f_3(0)=-180$.

$-180=a(0-3)(0-6)$
$-10=a$

La règle de la fonction f_4 est $f_4(x)=-10(x-3)(x-6)$.

- **IMAGE DE LA FONCTION f_4**

Puisque les zéros de la fonction f_4 sont 3 et 6, alors l'équation de l'axe de symétrie de la parabole représentant la fonction f_4 est $x=\frac{3+6}{2}=4{,}5$.

De plus, puisque $a=-10$, la fonction f_4 possède un maximum.

$\max f=f_4(4{,}5)=-10(4{,}5-3)(4{,}5-6)=22{,}5$

Donc, $ima\ f_4=]-\infty, 22{,}5]$.

- **CONCLUSION**

$ima\ f_4=]-\infty, 22{,}5]$