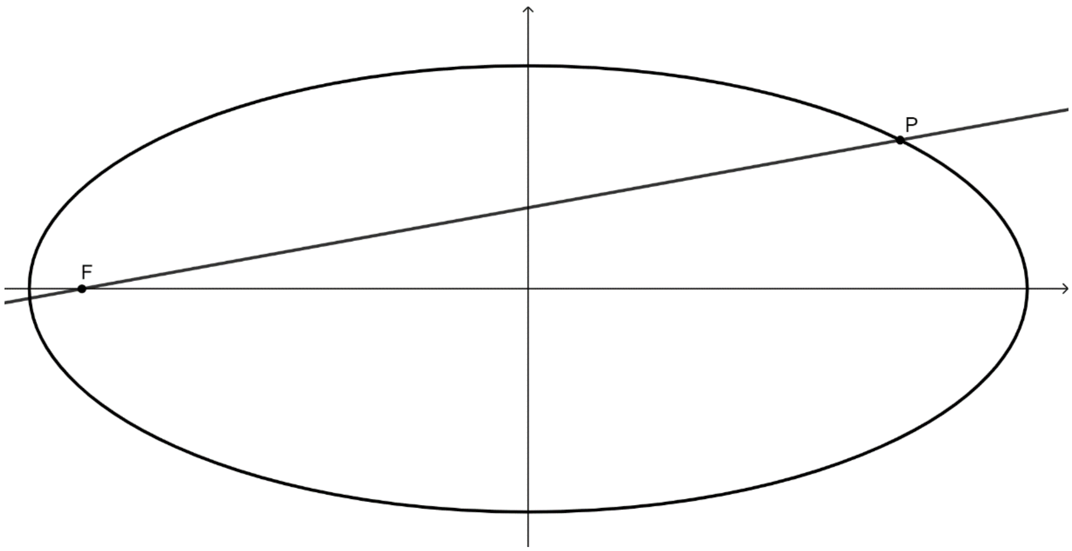
SITUATION D'APPLICATION : UN POINT D'INTERSECTION

Considérons l'ellipse centrée à l'origine et la droite FP représentées ci-dessous dans le plan cartésien.



- L'équation de l'ellipse est $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{9} = 1$.
- L'équation de la droite FP est de la forme $y = \frac{2}{11}x + b$.
- Le point F est l'un des foyers de l'ellipse.
- Le point P est l'un des points d'intersection de l'ellipse et de la droite FP.

Quelles sont les coordonnées du point P ?

- **COORDONNÉES DU POINT F**

Puisque le grand axe de l'ellipse est horizontal, l'on a que :

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$45 = 9 + c^2$$
$$6 = c$$

Puisque l'abscisse du point F est négative, les coordonnées du point F sont $\mathrm{F}(-6, 0)$.

- **ÉQUATION DE LA DROITE FP**

L'équation de la droite FP est de la droite $y = \frac{2}{11}x + b$.

Coordonnées d'un point de la droite : $\mathrm{F}(-6, 0)$

$$0 = \frac{2}{11}(-6) + b$$
$$\frac{12}{11} = b$$

L'équation de la droite FP est $y = \frac{2}{11}x + \frac{12}{11}$.

- **COORDONNÉES DU POINT P**

Le point P est l'un des points d'intersection de l'ellipse et de la droite FP.

Système d'équations :

$$\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{9} = 1$$
$$y = \frac{2}{11}x + \frac{12}{11}$$

En utilisant la méthode de substitution, l'on obtient :

$$9x^2 + 45\left(\frac{2}{11}x + \frac{12}{11}\right)^2 = 405$$
$$1269x^2 + 2160x - 42\,525 = 0$$

En utilisant la formule quadratique, l'on obtient :

$$x = \frac{-2160 \pm \sqrt{2160^2 - 4(1269)(-42\,525)}}{2(1269)} = \frac{-2160 \pm 14\,850}{2538}$$

$$x = \frac{-2160 - 14\,850}{2538} = -6{,}7021\ldots$$

À rejeter car l'abscisse du point P est positive.

OU

$$x = \frac{-2160 + 14\,850}{2538} = 5$$
$$\downarrow$$
$$y = \frac{2}{11}(5) + \frac{12}{11} = 2$$

- **CONCLUSION**

Les coordonnées du point P sont $\mathrm{P}(5, 2)$.