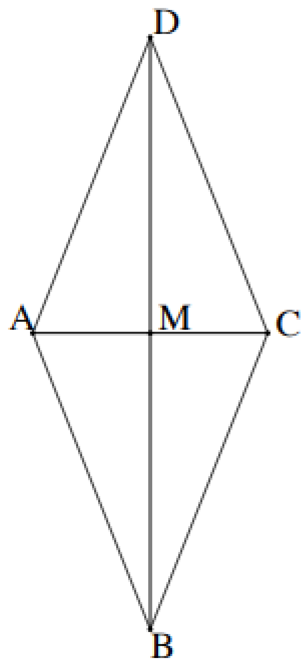
ENRICHISSEMENT - SITUATION D'APPLICATION : DES DIAGONALES PERPENDICULAIRES

Considérons le losange ADCB représenté ci-dessous.



Les diagonales AC et BD de ce losange se rencontrent en leur milieu au point M.

En utilisant les vecteurs, montrez que les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

- **PREUVE**

Un losange est un quadrilatère dont les quatre côtés sont isométriques.

Puisque les diagonales de ce losange se rencontrent en leur milieu, l'on a que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}{2}$$

Puisque $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, alors $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}$.

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BD} = \left(\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{2}\right)\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)$$

$$\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BD} = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} - \left(\overrightarrow{AB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AD}\right)^2 - \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB}}{2}$$

$\left(\overrightarrow{AB}\right)^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$ et $\left(\overrightarrow{AD}\right)^2 = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2$

Puisque les quatre côtés d'un losange sont isométriques, alors $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|$.
Donc, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2$.

$$\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BD} = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 - \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB}}{2}$$

$$\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BD} = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB}}{2}$$

$$\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BD} = \frac{0}{2}$$

$$\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$$

- **CONCLUSION**

Puisque $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$, alors $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux. Les diagonales AC et BD du losange sont donc perpendiculaires.