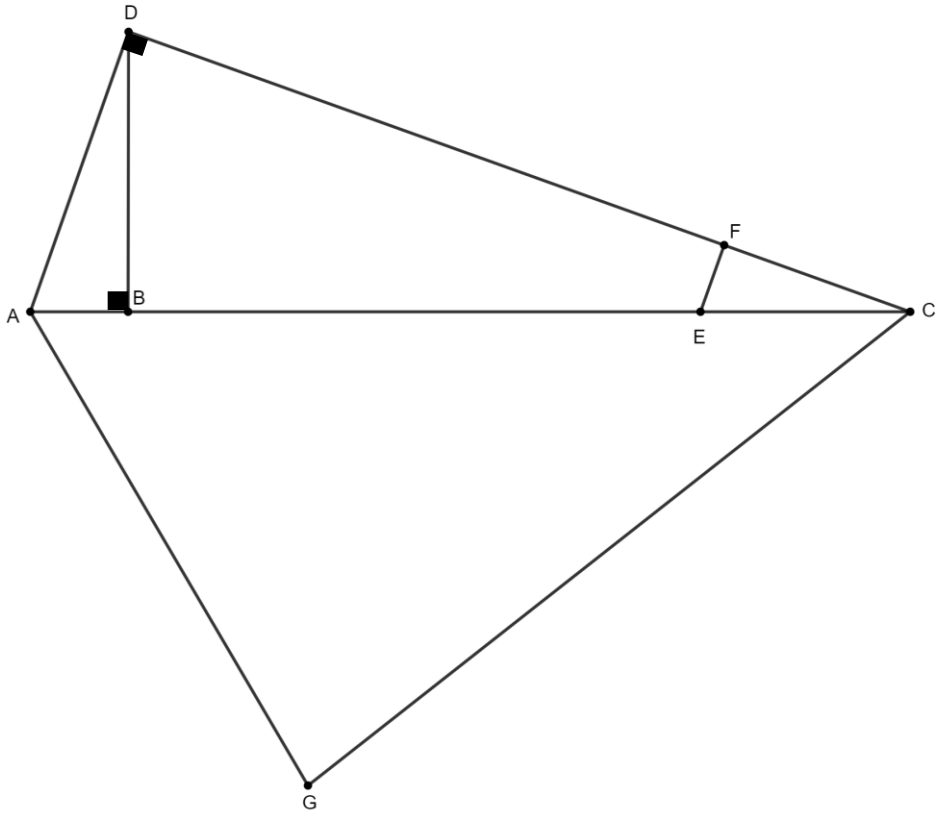
SITUATION D'APPLICATION : L'ANGLE CAG

Considérons les triangles ADC, CEF et ACG représentés ci-dessous.



- Le segment BD est l'une des hauteurs du triangle ADC.
- $\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{DF}} = 3 \times \mathrm{m}\,\overline{\mathrm{CF}}$
- $\overline{\mathrm{AD}} // \overline{\mathrm{EF}}$
- $\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{EF}} = 1{,}5$ cm
- $\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{BC}} = 16$ cm
- $\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{AG}} = 11{,}25$ cm
- $\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{CG}} = 15{,}75$ cm

Quelle est la mesure de l'angle CAG ?

- **SIMILITUDE DES TRIANGLES ADC ET CEF**

$\angle \mathrm{ACD} \cong \angle \mathrm{ECF}$	Il s'agit d'un angle commun aux triangles ADC et CEF.
$\angle \mathrm{DAC} \cong \angle \mathrm{FEC}$	Les angles DAC et FEC sont des angles alternes-internes isométriques formés de deux segments parallèles ($\overline{\mathrm{AD}}$ et $\overline{\mathrm{EF}}$) et d'un segment sécant ($\overline{\mathrm{AC}}$).

Donc, $\Delta \mathrm{ADC} \sim \Delta \mathrm{CEF}$.

- **MESURE DU SEGMENT AD**

Puisque $\Delta \mathrm{ADC} \sim \Delta \mathrm{CEF}$, les côtés homologues de ces deux triangles sont proportionnels.

$$\frac{\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{AD}}}{\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{EF}}} = \frac{\mathrm{m}\overline{\mathrm{CF}}}{\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{CD}}}$$
$$\frac{\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{AD}}}{1{,}5\ \mathrm{cm}} = \frac{\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{CF}}}{\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{CF}} + 3 \times \mathrm{m}\,\overline{\mathrm{CF}}} = \frac{1}{4}$$
$$\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{AD}} = 6\ \mathrm{cm}$$

La mesure du segment AD est de 6 cm.

- **MESURE DU SEGMENT AC**

Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et celle de l'hypoténuse entière.

Soit x, la mesure du segment AB, en cm.

$$(\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{AD}})^2 = (\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{AB}})(\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{AC}})$$
$$6^2 = x(x+16)$$
$$0 = x^2 + 16x - 36$$
$$0 = (x-2)(x+18)$$

$x - 2 = 0$
$x = 2$

OU

$x + 18 = 0$
$x = -18$
À rejeter, car la mesure du segment AD serait négative.

Donc, $\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{AC}} = 2\ \mathrm{cm} + 16\ \mathrm{cm} = 18\ \mathrm{cm}$.

- **MESURE DE L'ANGLE CAG**

En utilisant la loi des cosinus dans le triangle ACG, l'on obtient :

$$\mathrm{m}\,\angle \mathrm{CAG} = \cos^{-1}\left(\frac{(\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{CG}})^2 - (\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{AC}})^2 - (\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{AG}})^2}{-2(\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{AC}})(\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{AG}})}\right)$$

$$\mathrm{m}\,\angle \mathrm{CAG} = \cos^{-1}\left(\frac{(15{,}75\ \mathrm{cm})^2 - (18\ \mathrm{cm})^2 - (11{,}25\ \mathrm{cm})^2}{-2(18\ \mathrm{cm})(11{,}25\ \mathrm{cm})}\right)$$
$$\mathrm{m}\,\angle \mathrm{CAG} = 60°$$

- **CONCLUSION**

La mesure de l'angle CAG est de $60°$.