Mathématiques

SN 4

Situation-problème

LA NOUVELLE PISTE

Cahier de la tâche

Document élaboré par Jean-Michel Panet

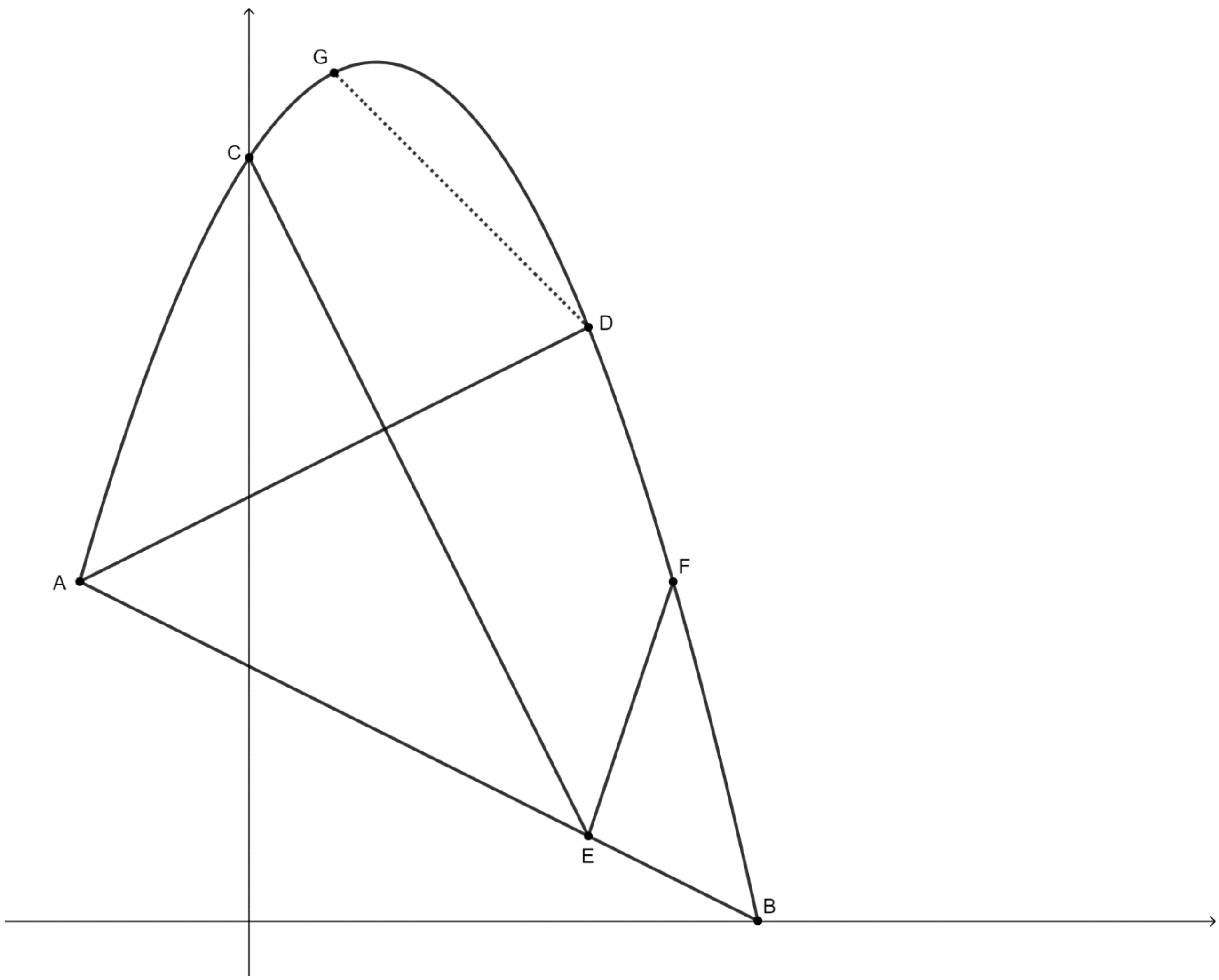
LA NOUVELLE PISTE

Le centre Action-Nature, situé en Mauricie, offre aux amateurs de ski de fond plusieurs pistes pour pratiquer leur sport favori.

Actuellement, on y retrouve cinq pistes de ski de fond: la plus longue est parabolique et les autres sont linéaires. Le propriétaire du site souhaite faire aménager une sixième piste.

LE PLAN DES PISTES

Les différentes pistes de ski de fond du centre Action-Nature sont représentées ci-dessous dans le plan cartésien, qui est gradué en hectomètres. La nouvelle piste qui sera aménagée est représentée par le segment de droite DG. Comme elle n'a pas encore été aménagée, elle est représentée en pointillé.



- La plus longue piste est représentée par une parabole. Les points A, B, C, D, F et G sont six des points de cette parabole.
- Les pistes linéaires sont représentées par les segments de droite AB, CE, AD et EF.
- L'équation associée au segment de droite CE est $\frac{x}{9} + \frac{y}{18} = 1$.
- Les coordonnées du point B sont $\mathrm{B}(12, 0)$.
- $\overline{\mathrm{AD}} \perp \overline{\mathrm{CE}}$
- L'équation associée au segment de droite EF est $3x - y - 22 = 0$.
- L'ordonnée des points A et F est 8.
- Le point E est l'un des points du segment de droite AB.
- L'abscisse du point E est 8.

LA NOUVELLE PISTE

Le propriétaire souhaite que la nouvelle piste de ski de fond, qui est représentée par le segment de droite DG, respecte certaines contraintes. Sur le plan des pistes de ski de fond de la page précédente :

1. le point G ne doit pas être le sommet de la parabole;
2. l'abscisse du point G doit être un nombre entier.

Votre tâche consiste à déterminer une équation possible pour le segment de droite DG qui représente la nouvelle piste de ski de fond qui sera aménagée au centre Action-Nature.

CLÉ DE CORRECTION

- **ABSCISSE DU POINT F**

Puisque l'ordonnée du point F est 8, on cherche la valeur de x pour laquelle $y = 8$.

$3x - 8 - 22 = 0$

$x = 10$

L'abscisse du point F est 10.

- **ORDONNÉE DU POINT E**

Puisque l'abscisse du point E est 8, on cherche la valeur de y pour laquelle $x = 8$.

$\frac{8}{9} + \frac{y}{18} = 1$

$\frac{y}{18} = \frac{1}{9}$

$y = 2$

L'ordonnée du point E est 2.

- **ÉQUATION ASSOCIÉE AU SEGMENT DE DROITE AB**

Les points $\mathrm{B}(12, 0)$ et $\mathrm{E}(8, 2)$ sont deux des points du segment de droite AB.

Pente de $\overline{\mathrm{AB}} = \frac{2-0}{8-12} = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + b$

$0 = -\frac{1}{2}(12) + b$

$6 = b$

L'équation associée au segment de droite AB est $y = -\frac{1}{2}x + 6$.

- **ABSCISSE DU POINT A**

Puisque l'ordonnée du point A est 8, on cherche la valeur de x pour laquelle $y = 8$.

$$8 = -\frac{1}{2}x + 6$$

$$-4 = x$$

L'abscisse du point A est -4.

- **PENTE DU SEGMENT DE DROITE CE**

L'équation associée au segment de droite CE est $\frac{x}{9} + \frac{y}{18} = 1$.

$$\text{Pente de } \overline{\text{CE}} = -\frac{18}{9} = -2$$

La pente du segment de droite CE est -2.

- **ÉQUATION ASSOCIÉE AU SEGMENT DE DROITE AD**

Puisque $\overline{\text{AD}} \perp \overline{\text{CE}}$, l'on a que :

$$\text{Pente de } \overline{\text{AD}} \times \text{Pente de } \overline{\text{CE}} = -1$$

$$\text{Pente de } \overline{\text{AD}} \times -2 = -1$$

$$\text{Pente de } \overline{\text{AD}} = \frac{1}{2}$$

Puisque le point $\text{A}(-4, 8)$ est l'un des points du segment de droite AD, l'on a que :

$$y = \frac{1}{2}x + b$$

$$8 = \frac{1}{2}(-4) + b$$

$$10 = b$$

L'équation associée au segment de droite AD est $y = \frac{1}{2}x + 10$.

- **ÉQUATION DE L'AXE DE SYMÉTRIE DE LA PARABOLE**

Les points $\mathrm{A}(-4, 8)$ et $\mathrm{F}(10, 8)$ sont deux des points de la parabole. Puisque l'ordonnée des points A et F est la même, l'équation de l'axe de symétrie de la parabole est :

$$x = \frac{-4 + 10}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

L'équation de l'axe de symétrie de la parabole est $x = 3$.

- **ÉQUATION DE LA PARABOLE**

Soit x_1 et x_2, les abscisses à l'origine de la parabole. Dans ce contexte particulier, $x_2 = 12$ et x_1 n'existe pas. Toutefois, afin de trouver l'équation de la parabole, il est possible de déterminer x_1 comme suit :

$$\frac{x_1 + 12}{2} = 3$$

$$x_1 = -6$$

L'équation de la parabole est de la forme $y = a(x + 6)(x - 12)$. Puisque le point $\mathrm{A}(-4, 8)$ est l'un des points de la parabole, l'on a que :

$$8 = a(-4 + 6)(-4 - 12)$$

$$8 = -32a$$

$$-\frac{1}{4} = a$$

L'équation de la parabole est $y = -\frac{1}{4}(x + 6)(x - 12)$.

- **COORDONNÉES DU POINT D**

Le point D est l'un des points d'intersection de la parabole et du segment de droite AD.

Système d'équations à résoudre :

$$y = \frac{1}{2}x + 10$$
$$y = -\frac{1}{4}(x+6)(x-12)$$

En utilisant la méthode de comparaison, l'on obtient :

$$y = y$$
$$\frac{1}{2}x + 10 = -\frac{1}{4}(x+6)(x-12)$$
$$-2x - 40 = x^2 + 6x - 12x - 72$$
$$-2x - 40 = x^2 - 6x - 72$$
$$0 = x^2 - 4x - 32$$

En utilisant la formule quadratique, l'on obtient :

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-32)}}{2(1)} = \frac{4 \pm 12}{2}$$

$$x = \frac{4-12}{2} = -4$$

Cette solution est à rejeter, car l'abscisse du point D est supérieure à 0.

ET

$$x = \frac{4+12}{2} = 8$$
$$\downarrow$$
$$y = \frac{1}{2}(8) + 10 = 14$$

Les coordonnées du point D sont $\mathrm{D}(8, 14)$.

- **ÉQUATIONS POSSIBLES ASSOCIÉES AU SEGMENT DE DROITE DG**

Puisque l'équation de l'axe de symétrie de la parabole est $x = 3$, alors l'abscisse du sommet de la parabole est 3.

Puisque le point G n'est pas le sommet de la parabole, l'abscisse du point G est un nombre entier supérieur à 0, mais inférieur à 3. Les deux valeurs possibles sont 1 et 2.

Coordonnées du point D	Abscisse du point G	Équation associée au segment de droite DG
$\mathrm{D}(8, 14)$	Si $x = 1$ $\downarrow$ $y = -\frac{1}{4}(1+6)(1-12) = \frac{77}{4}$	$\text{Pente de } \overline{\mathrm{DG}} = \frac{\frac{77}{4} - 14}{1 - 8} = -\frac{3}{4}$ $y = -\frac{3}{4}x + b$ $14 = -\frac{3}{4}(8) + b$ $20 = b$ $\downarrow$ $y = -\frac{3}{4}x + 20$
	Si $x = 2$ $\downarrow$ $y = -\frac{1}{4}(2+6)(2-12) = 20$	$\text{Pente de } \overline{\mathrm{DG}} = \frac{20 - 14}{2 - 8} = -1$ $y = -x + b$ $14 = -8 + b$ $22 = b$ $\downarrow$ $y = -x + 22$

Les équations possibles associées au segment de droite DG sont $\boldsymbol{y = -\frac{3}{4}x + 20}$ ou $\boldsymbol{y = -x + 22}$.