Mathématiques

SN4

Situation-problème

MARIO CONTRE-ATTAQUE III : L’ANACONDA

Cahier de l’élève

Document élaboré par Jean-Michel Panet

MARIO CONTRE-ATTAQUE III : L'ANACONDA

Lors d'un parcours, Mario se déplace sur différents blocs.

À la fin de ce parcours, afin de réussir à s'échapper de l'anaconda qui l'attend dans le précipice, Mario doit effectuer un saut.

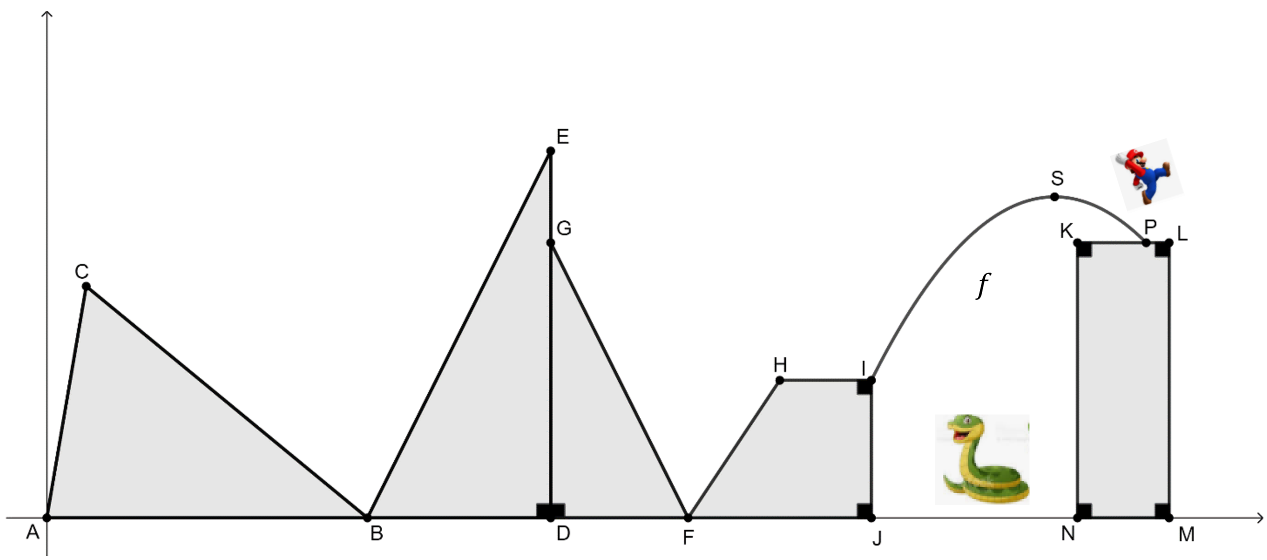
LE PARCOURS DE MARIO

Dans le plan cartésien ci-dessous, qui est gradué en décimètres, la fonction polynomiale du second degré f représente le saut de Mario.

Le triangle ACB, le triangle BED, le triangle DGF, le trapèze FHIJ et le rectangle KLMN sont les faces avant des différents blocs sur lesquels Mario se déplace.

Le point I représente l'endroit où Mario s'élance du quatrième bloc alors que le point P représente celui où il atterrit sur le cinquième bloc.

Le point S est le sommet de la parabole représentant la fonction f.



- Les points A, B, D, F, J, N et M sont des points de l'axe des x.
- $\mathrm{m}\ \overline{\mathrm{AC}} = 5\ \mathrm{dm}$
- $\mathrm{m}\ \overline{\mathrm{BC}} = 8\ \mathrm{dm}$
- $\mathrm{m}\ \angle\mathrm{ACB} = 60°$
- $\angle\mathrm{BED} \cong \angle\mathrm{DGF}$
- $\mathrm{m}\ \overline{\mathrm{GE}} = \mathrm{m}\ \overline{\mathrm{HI}} = 2\ \mathrm{dm}$
- L'abscisse du point D est 11.
- La mesure du segment de droite DE est 5 dm de plus que celle du segment de droite DF.
- $\overline{\mathrm{FJ}} \cong \overline{\mathrm{BD}}$
- Le trapèze FHIJ et le triangle DGF sont équivalents.
- L'abscisse du point N est $22{,}5$.
- $\mathrm{m}\ \overline{\mathrm{MN}} = (4\mathrm{w} + 1)\ \mathrm{dm}$
- $\mathrm{m}\ \overline{\mathrm{KN}} = (25\mathrm{w} + 1)\ \mathrm{dm}$
- L'aire du rectangle KLMN est de $10{,}8$ dm^2.

LE SAUT DE MARIO

Pour éviter l'anaconda, Mario effectue un saut parabolique du quatrième bloc qui lui permet d'atterrir sur le cinquième bloc.

Le saut de Mario est représenté par la fonction polynomiale du second degré f ayant les caractéristiques suivantes.

1. L'abscisse du point S est 22.
2. L'ordonnée du point S est un multiple de $0{,}5$.
3. L'ordonnée du point S est supérieure à l'ordonnée du point G, mais inférieure à celle du point E.

Votre tâche consiste à déterminer une règle possible pour la fonction f.

Clé de correction

- **MESURE DU SEGMENT DE DROITE AB**

En utilisant la loi des cosinus dans le triangle ABC, l'on obtient :

$$(\mathrm{m}\ \overline{\mathrm{AB}})^2 = (\mathrm{m}\ \overline{\mathrm{AC}}\ )^2 + (\mathrm{m}\ \overline{\mathrm{BC}})^2 - 2(\mathrm{m}\ \overline{\mathrm{AC}})(\mathrm{m}\ \overline{\mathrm{BC}})\cos(\mathrm{m}\ \angle\mathrm{ACB})$$
$$\mathrm{m}\ \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(5\ \mathrm{dm})^2 + (8\ \mathrm{dm})^2 - 2(5\ \mathrm{dm})(8\ \mathrm{dm})\cos 60°}$$
$$\mathrm{m}\ \overline{\mathrm{AB}} = 7\ \mathrm{dm}$$

La mesure du segment de droite AB est de 7 dm.

- **SIMILITUDE DES TRIANGLES BED ET DGF**

$\mathrm{m}\ \angle\mathrm{BDE} = \mathrm{m}\ \angle\mathrm{FDG} = 90°$	Donnée de la situation
$\angle\mathrm{BED} \cong \angle\mathrm{DGF}$	Donnée de la situation
$\Delta\ \mathrm{BED} \sim \Delta\ \mathrm{DGF}$	Deux triangles qui ont deux paires d'angles homologues isométriques sont semblables.

- **MESURE DU SEGMENT DE DROITE BD**

Puisque $\mathrm{m}\ \overline{\mathrm{AB}} = 7$ dm, alors l'abscisse du point B est 7.

$$\mathrm{m}\ \overline{\mathrm{BD}} = \text{Abscisse du point D} = \text{Abscisse du point B} = 11 - 7 = 4$$

La mesure du segment de droite BD est de 4 dm.

- **MESURE DU SEGMENT DE DROITE DF**

Posons que q est la mesure du segment de droite DF, en décimètres, et que r est la mesure du segment de droite DG, en décimètres.

Puisque les triangles BED et DGF sont semblables, leurs côtés homologues sont proportionnels. Alors, l'on a que :

$$\frac{\mathrm{m}\ \overline{\mathrm{DF}}}{\mathrm{m}\ \overline{\mathrm{BD}}} = \frac{\mathrm{m}\ \overline{\mathrm{DG}}}{\mathrm{m}\ \overline{\mathrm{DE}}}$$
$$\frac{q}{4} = \frac{r}{r+2}$$
$$q(r+2) = 4r$$

Puisque le segment de droite DE mesure 5 dm de plus que le segment de droite DF, alors l'on a que $r + 2 = q + 5$.

Système d'équations :

$q(r+2) = 4r$

$r + 2 = q + 5 \rightarrow r - 3 = q$

En utilisant la méthode de substitution, l'on obtient :

$(r-3)(r+2) = 4r$

$r^2 - 5r - 6 = 0$

$(r-6)(r+1) = 0$

Alors, $r = 6$ ou $r = -1$. Puisque la mesure d'un segment ne peut être négative, alors $r = 6$. Donc, $q = 6 - 3 = 3$.

La mesure du segment de droite DF est de 3 dm.

- **ABSCISSE DU POINT F**

$$\text{Abscisse du point F} = \text{Abscisse du point D} + \text{m}\ \overline{\text{DF}} = 11 + 3 = 14$$

L'abscisse du point F est 14.

- **AIRE DU TRIANGLE DGF**

$$\text{Aire du triangle DGF} = \frac{\text{m}\ \overline{\text{DF}} \times \text{m}\ \overline{\text{DG}}}{2} = \frac{3\ \text{dm} \times 6\ \text{dm}}{2} = 9\ \text{dm}^2$$

L'aire du triangle DGF est de 9 dm^2.

- **MESURE DU SEGMENT DE DROITE IJ**

Puisque le triangle DGF et le trapèze FHIJ sont équivalents, alors ils ont la même aire, soit 9 dm^2.

$$\text{Aire du trapèze FHIJ} = \frac{(\text{m}\ \overline{\text{FJ}} + \text{m}\ \overline{\text{HI}}) \times \text{m}\ \overline{\text{IJ}}}{2}$$

$$9\ \text{dm}^2 = \frac{(4\ \text{dm} + 2\ \text{dm}) \times \text{m}\ \overline{\text{IJ}}}{2}$$

$$3\ \text{dm} = \text{m}\ \overline{\text{IJ}}$$

La mesure du segment de droite IJ est de 3 dm.

- **ABSCISSE DU POINT J**

$$\text{Abscisse du point J} = \text{Abscisse du point F} + \text{m}\ \overline{\text{FJ}} = 14 + 4 = 18$$

L'abscisse du point J est 18.

- **COORDONNÉE DU POINT I**

L'abscisse du point I est la même que celle du point J, soit 18.

Puisque $\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{IJ}} = 3\ \mathrm{dm}$, alors l'ordonnée du point I est 3.

Les coordonnées du point I sont $\mathrm{I}(18, 3)$.

- **VALEUR DE *w***

Puisque l'aire du rectangle KLMN est de $10{,}8$ dm^2, alors l'on a que :

$$(4w+1)(25w+1) = 10{,}8$$
$$100w^2 + 29w - 9{,}8 = 0$$

En utilisant la formule quadratique, l'on obtient :

$$w = \frac{-29 \pm \sqrt{29^2 - 4(100)(-9{,}8)}}{2(100)} = \frac{-29 \pm 69}{200}$$

$$w = \frac{-29-69}{200} = -0{,}49$$

À rejeter, car la mesure du segment de droite MN serait négative.

OU

$$w = \frac{-29+69}{200} = 0{,}2$$

Donc, $w = 0{,}2$.

- **MESURE DU SEGMENT DE DROITE MN**

$$\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{MN}} = 4\mathrm{w} + 1 = 4(0{,}2) + 1 = 1{,}8\ \mathrm{dm}$$

La mesure du segment de droite MN est de $1{,}8$ dm.

- **MESURE DU SEGMENT DE DROITE KN**

$$\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{kN}} = 25\mathrm{w} + 1 = 25(0{,}2) + 1 = 6\ \mathrm{dm}$$

La mesure du segment de droite MN est de 6 dm.

- **COORDONNÉES DU POINT K**

L'abscisse du point K est la même que celle du point N, soit 22,5.

Puisque $\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{KN}} = 6\ \mathrm{dm}$, alors l'ordonnée du point K est 6.

Les coordonnées du point K sont $\mathrm{K}(22{,}5\ \ , 6)$.

- **RÈGLE DE LA FONCTION $\boldsymbol{f}$**

La fonction f est représentée par une parabole de sommet S.

L'abscisse du point S est 22.

L'ordonnée du point S est supérieure à celle du point G, mais inférieure à celle du point G. Comme il s'agit d'un multiple de $0{,}5$, il y a trois possibilités : $6{,}5$, 7 et $7{,}5$.

Le point $\mathrm{I}(18, 3)$ est l'un des points de cette parabole.

Le point P doit être l'un des points du segment de droite KL. L'ordonnée du point P est donc 6. Puisque $\mathrm{m}\,\overline{\mathrm{KL}} = 1{,}8\ \mathrm{dm}$, alors l'abscisse du point P doit être supérieure ou égale à $22{,}5$, mais inférieure ou égale à $24{,}3$.

Coordonnées du point S	**Règle de la fonction $\boldsymbol{f}$**	**L'abscisse du point P est-elle supérieure ou égale à $\mathbf{22{,}5}$, mais inférieure ou égale à $\mathbf{24{,}3}$?**
$\mathrm{S}(22\,,6{,}5)$	$3 = a(18-22)^2 + 6{,}5$ $-\frac{7}{32} = a$ ↓ $f(x) = -\frac{7}{32}(x-22)^2 + \frac{13}{2}$	$6 = -\frac{7}{32}(x-22)^2 + \frac{13}{2}$ $\frac{16}{7} = (x-22)^2$ $x = 20{,}4881$ ... (à rejeter) x =23,5118… ↓ Oui
$\mathrm{S}(22\,,7)$	$f(x) = -\frac{1}{4}(x-22)^2 + 7$	$x = 24$ ↓ Oui
$\mathrm{S}(22\,,7{,}5)$	$f(x) = -\frac{9}{32}(x-22)^2 + \frac{15}{2}$	$x = 24{,}3094$ ... ↓ Non

- **RÉPONSES POSSIBLES**

Une règle possible pour la fonction f est :

$$\boldsymbol{f(x) = -\frac{7}{32}(x-22)^2 + \frac{13}{2}}$$

OU

$$\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{4}(x-22)^2 + 7}$$